Cerchiamo una funzione det

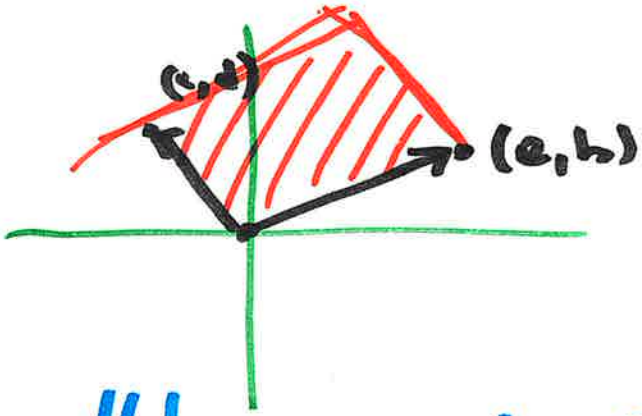
$$\mathbb{K}^{n,n} = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

tale che $\det(S) \neq 0$ $\qquad S = [\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n]$

se e solamente se le colonne di S sono una base di $\mathbb{K}^n$

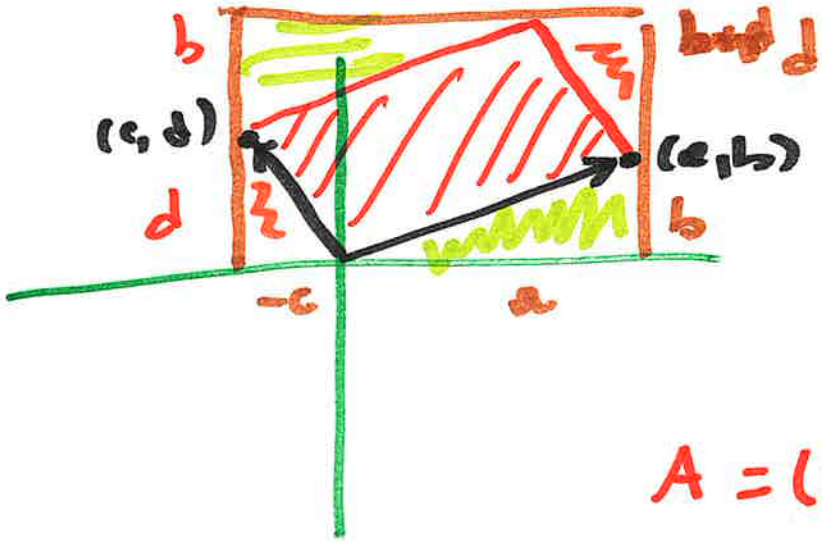
$\Leftrightarrow \mathcal{L}(S) = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(S) = n$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0$




(a,b) e (c,d)

indip $\Leftrightarrow$ area del parallelogramma $\neq 0 \Leftrightarrow$




$A = (a-c)\cdot(b+d) - ab + cd$

$= ab + ad - cb - cd + ab + cd =$

$= ad - cb = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} =$

$= ad - bc$

$(a,b)$ e $(c,d)$ sono indip in $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$\det \begin{pmatrix} a & dc \\ b & ad \end{pmatrix} = d(ad - bc)$

$\det \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} a & c+e \\ b & d+f \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}$$

Vogliamo una funzione det tale che

1) $\det(S) \neq 0 \iff S$ è una base di $\mathbb{K}^n$

2) $\det(S) = 0$ se $S$ contiene vettori linearmente dip.
in particolare se $S$ contiene 2 vettori uguali.

3) se ad un vettore di $S$ si somma una c. lineare dei rimanenti vettori di $S \Rightarrow$
$\Rightarrow \det(S)$ non cambi.

4) se ad un vettore di $S$ sommiamo un altro vettore $\det S$ cambi nel seguente modo

$$\det[\bar{v}_2 \dots \bar{v}_i + \bar{w}_i \dots \bar{v}_n] =$$

$$= \det[\bar{v}_2 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_n] + \det[\bar{v}_2 \dots \bar{w}_i \dots \bar{v}_n]$$

5) Se si moltiplica un vettore di S per $\alpha$

$$\det([\bar{v}_2 \dots \alpha\bar{v}_i \dots \bar{v}_n]) = \alpha\det([\bar{v}_2 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_n])$$

6) Scambiare vettori di S fra loro non faccia diventare $\det(S) \neq 0 \rightarrow \det(S') = 0$ [scambiare vettori in S non cambia la nullità o meno di $\det(S)$].

**Def:** Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ sul campo $\mathbb{K}$.

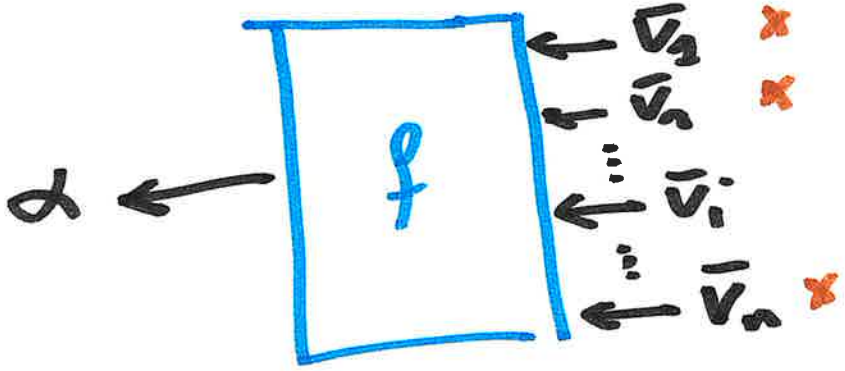
Una funzione

$$f: \begin{cases} V_n^t \to \mathbb{K} \\ (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t) \to d \end{cases} \qquad V_n^t = V_n \times V_n \times \dots \times V_n$$

è detta forma <u>t-multilineare</u> se comunque fissati $(t-1)$ vettori di $V_n$ la funzione

$$f_{\bar{v}_{i_1} \dots \bar{v}_{i_{t-1}}}: \begin{cases} V_n \to K \\ \bar{x} \to f(\bar{v}_{i_1} \dots \bar{x} \dots \bar{v}_{i_n}) \end{cases}$$

è lineare.




$\forall i:\ f([\bar{v}_1 \dots \alpha\bar{v}_i + \beta\bar{w}_i \dots \bar{v}_k]) =$

$= \alpha f([\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_k]) + \beta f([\bar{v}_1 \dots \bar{w}_i \dots \bar{v}_k])$

$\forall i$ $\quad f^i_{\substack{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{i-1} \\ j \neq i}}(\bar{x}) = f(\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{i-1}}\ \bar{x}\ \underbrace{\bar{v}_{i+1} \dots \bar{v}_k})$

$f^i_{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{i-1}\bar{v}_{i+1} \dots \bar{v}_k}$ è lineare

**Def:** $f : V_n(\mathbb{K})^t \to \mathbb{K}$

multilineare è detta simmetrica

se scambiando 2 suoi argomenti

$f$ non cambia.

Es: $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$((a,b),(c,d)) \to ac + bd$

è detta alternante

se $f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) = 0$ equivale che esistono $i,j$ tali che $\bar{v}_i = \bar{v}_j$

è detta antisimmetrica se

$$f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_k) = -f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_k)$$

$f$ cambia di segno ogni volta che si scambiano 2 vettori.

**OSS:** se $-1 \neq +1$ ANTISIMMETRICA $\Rightarrow$ ALTERNANTE.

$$f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_i \dots \bar{v}_j \dots v_k) = -f(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_j \dots \bar{v}_i \dots v_k) =$$

se $\bar{v}_i = \bar{v}_j$

$$= 0$$

ALTERNANTE $\Rightarrow$ ANTISIMMETRICA

$\boxed{k=2}$ $\quad f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) =$

$$= f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_2) =$$

$$f(\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_2) + f(\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_1+\bar{v}_2) =$$

$$= f(\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_1+2\bar{v}_2) + [illegible]$$

$$- f\left(\bar{v}_1+\tfrac{1}{2}\bar{v}_2, \bar{v}_1+\tfrac{1}{2}\bar{v}_2\right) = f(\bar{v}_1+\bar{v}_2-\bar{v}_1-2\bar{v}_2, \bar{v}_1+2\bar{v}_2) =$$

$$= f(-\bar{v}_2, \bar{v}_1+2\bar{v}_2) +$$

$$+ f(-\bar{v}_2, -\bar{v}_2) = f(-\bar{v}_2, \bar{v}_1+\bar{v}_2) + f(-\bar{v}_2, -\bar{v}_2) =$$

$$= f(-\bar{v}_2, \bar{v}_1) = -f(\bar{v}_2, \bar{v}_1).$$

<u>oss:</u> Sia $f$ una forma bilineare alternante e supponiamo che $S = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k]$ sia una sequenza legata di vettori $\Rightarrow f(S) = 0$

$S$ legal $\Rightarrow$ WLOG $\bar{v}_t = \sum_{i<t} \alpha_i \bar{v}_i$

$$\Rightarrow f(S) = f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ \bar{v}_t]) =$$

$$= f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ \sum_{j<t} \alpha_j \bar{v}_j]) =$$

$$= f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ \sum_{j<t} \alpha_j \bar{v}_j]) -$$

$$- \alpha_j f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ \bar{v}_{t-1}]) =$$

$$= f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ \sum_{j<t} \alpha_j v_j - \alpha_j \bar{v}_{t-1}]) =$$

$$= f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ \sum_{j<t-1} \alpha_j \bar{v}_j]) = \cdots =$$

$$= f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ 0\ 0]) =$$

$$= f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ 0\ 0]) =$$

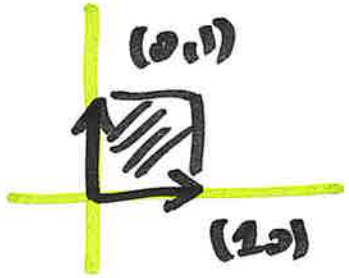
$$= 0 \cdot f([\bar{v}_2 \cdots \bar{v}_{t-1}\ 0\ 0]) = 0 \qquad \square$$

**Def:** Sia $\mathbb{K}$ un campo e $n \geq 1$ un intero. Si dice <u>determinante</u> l'<u>unica</u> forma $n$-multilineare alternante

$$\det : \mathbb{K}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

tale che $\det(I_n) = 1$ ove $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Sappiamo già che $\det(M) = 0$ se le colonne di $M$ sono linearmente dipendenti.




$$M = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tR_1 \\ {}^tR_2 \\ \vdots \\ {}^tR_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$: colonne — righe.

Vogliamo far vedere che $\det(M) = a \det(I_n)$ con $a$ opportuno.

Se le colonne di $M$ sono legate $\Rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow a = 0$

FINE.

Supponiamo che le colonne di $M$ siano libere $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sono una base di $\mathbb{K}^n$ (perché sono $n$)

$\Rightarrow$ in particolare ogni vettore di $\mathbb{K}^n$ si può scrivere come c.lineare delle colonne di $M$.

$$\bar{e}_1 = a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + \dots + a_{1n} c_n$$

$\Rightarrow \det(M) = -\det($ [illegible]

$$\det(M') = \det[\, c_1' \dots c_n' \,] \text{ con}$$

$$\bar{e}_1 = a_{11}' c_1' + \dots + a_{1n}' c_n' \text{ ed } a_{11}' \neq 0$$

~~$\det(M) = \det[$~~ [illegible]

$$c_1' = (a_{11}')^{-1} [\bar{e}_1 - a_{12}' c_2' \dots - a_{1n}' c_n']$$

$$\Rightarrow \det(M') = \det[c_1' \; c_2' \dots c_n'] =$$

$$= (a_{11}')^{-1} \det[\bar{e}_1 \; c_2' \dots c_n'] =$$

$$- (a_{11}')^{-1} \left[ \sum_{i>1} \det(a_{1i}' \bar{c}_i' \; c_2' \dots c_n') \right]$$

due colonne uguali!

$$= (a_{11}')^{-1} \det[\bar{e}_1 \; c_2' \dots \bar{c}_n']$$

$$\bar{e}_2 = \beta_1 \bar{e}_1 + a_{22} c_2' + \dots + a_{2n} c_n'$$

se $a_{11} \neq 0$ → CONTINUO

se $a_{11} = 0$ → scambio II colonna e prima colonna con coeff. non nullo ed indice $> 2$.

Poi $\det [\bar{e}_1 \bar{c}_2' \dots \bar{c}_n'] =$

$= \pm \det [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{c}_3'' \dots \bar{c}_n''] (a_{22}'')^{-1}$

e così via.

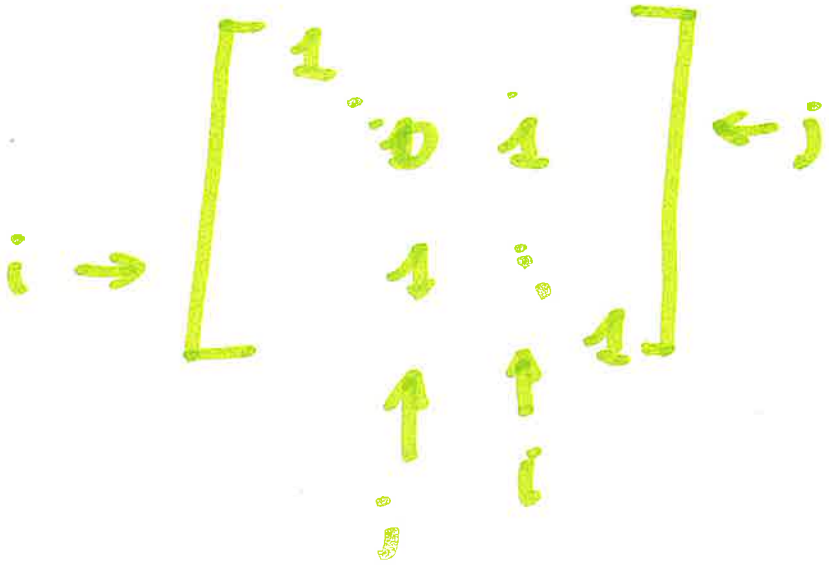
Dopo n passaggi

$$\det (M) = \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{nn}) \det I_n$$

con $a_{ii} \neq 0$ tutti quanti $\Rightarrow$

se M base $\Rightarrow$ det è univocamente determinato e $\det(M) \neq 0$.

oss: Scambiare 2 colonne di M corrisponde a moltiplicare M per una matrice del tipo



Sommare ad una colonna $j$ di $M$ una combinazione delle rimanenti corrisponde a moltiplicare $M$ per una matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \qquad n=1$$

supponga $m_{11} \neq 0$ $\quad c_1 = m_{11}\, a_{11}\bar{e}_1 + a_n c_2 + \dots + a_{1n} c_n$

$$\det[c_1 \dots c_n] = \det[a_{11}\bar{e}_1\ c_2 \dots c_n] =$$

$$= \det a_{11} \det[\bar{e}_1\ \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n] =$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & m_{21} \dots m_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & m_{n1} \dots m_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H^{(n-1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(n-1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H^{(n-1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & A^{(n-1)} & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & H^{(n-1)} A^{(n-1)} & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = T_n$$

$$H^{(n-1)} A^{(n-1)} = T_{n-1}$$

$$H^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \\ A_{n-1} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$H_{n-1} A_{n-1} = T_{n-1}$$

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H_{n-2} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \\ A_{n-2} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \\ A_{n-2} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$H_{n-2} A_{n-2} = T_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$H_2 A_2 = T_2$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & H_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$H_1 A_1 = T_1$$

$$H_1 = [1]$$

$$A_1 = [a_{nn}]$$

$$T_1 = [a_{nn}]$$

# I Teorema di Laplace.

**Teorema**: Si consideri la funzione ricorsiva definita da

$$\mathrm{Det}\,((a_{11})) = a_{11}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\boxed{\mathrm{Det}\, M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij}\, \mathrm{Det}(M_{ij})}$$

$j$ fissato

ove $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$ e $M_{ij}$ = minore di $M$ ottenuto togliendo ad $M$ la riga $i$ e la colonna $j$.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^2 a\cdot d + (-1)^3 b c = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ove $\mathrm{Det}(M) = |M|$

La funzione $\mathrm{Det}(M)$ vale 1 per $I_n$
ed è multilineare alternante nelle colonne.
$\Rightarrow$ essa coincide col determinante di $M$.

$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}({}^tM)$

10x10

10 det. di matrici 9x9

↳ 9 det. di 8x8

La complessità del metodo di Laplace è n!

operazioni